



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1

Aritmética **ANÁLISIS** **COMBINATORIO**



INTRODUCCIÓN

El origen de los problemas de conteo o “teoría combinatoria” se relaciona con los juegos de azar, más concretamente, con los juegos de cartas y dados (Pascal y Fermat).



Tiene aplicaciones en la ciencia computacional, especialmente en las codificaciones y análisis de algoritmos, también está presente en el estudio de moléculas orgánicas, así como en el estudio de epidemias.



ANÁLISIS COMBINATORIO

Es una parte de las matemáticas que estudia las diversas maneras de realizar ordenamientos o agrupaciones con todos o parte de los elementos (números, letras u objetos) de un conjunto dado; los cuales se pueden o no diferenciar por el orden de ubicación de los elementos.



Principios Fundamentales de conteo

- ***Principio de la multiplicación***
- ***Principio de la adición***

Principio de la Multiplicación

Si el evento A se realiza de p formas diferentes y para cada una de estas formas existe un segundo evento B que se puede realizar de q formas diferentes, entonces la realización del evento A y B esto es, **ocurren simultáneamente o uno a continuación de otro**, se podrá hacer de: $p \cdot q$ formas diferentes.

Ejemplo 1 :

¿Cuántos resultados diferentes obtenemos al lanzar un dado y una moneda?

Resolución:



6 resultados diferentes

Y



2 resultados diferentes

Dado

Moneda



Cada resultado del dado se puede relacionar con los dos resultados de la moneda

6

X

2

=

12

resultados
diferentes

$$\left\{ \begin{array}{l} (1; C), (1; S), (2; C), (2; S), \\ (3; C), (3; S), (4; C), (4; S), \\ (5; C), (5; S), (6; C), (6; S) \end{array} \right\}$$

Aplicación 1

En un hospital para codificar las historias clínicas de los pacientes, se coloca una letra de las 27 que tiene el abecedario, seguido de dos dígitos diferentes, luego el tipo de sangre (A, B, AB y O) y por último la especialidad atendida (hay 24 especialidades). ¿Cuántas historias clínicas diferentes se pueden obtener?

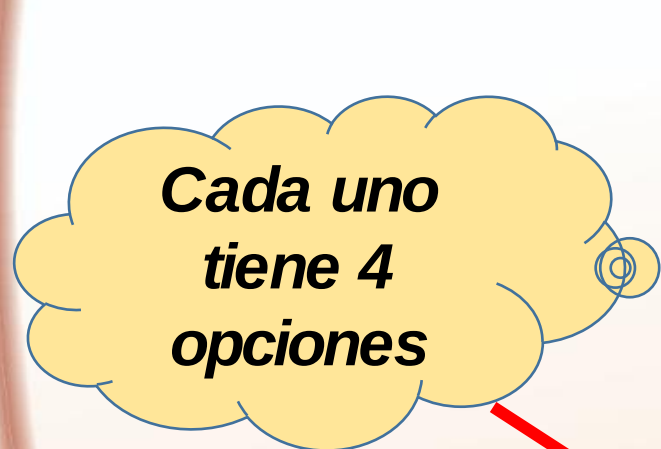
Resolución



Aplicación 2

Ángel, Beto y Carlos deben viajar a la ciudad de Ica, llegan al terminal y encuentran 4 buses listos para partir, ¿de cuántas maneras diferentes pueden ellos elegir el bus para viajar, si dos de ellos pueden ir en el mismo bus, pero los tres no?

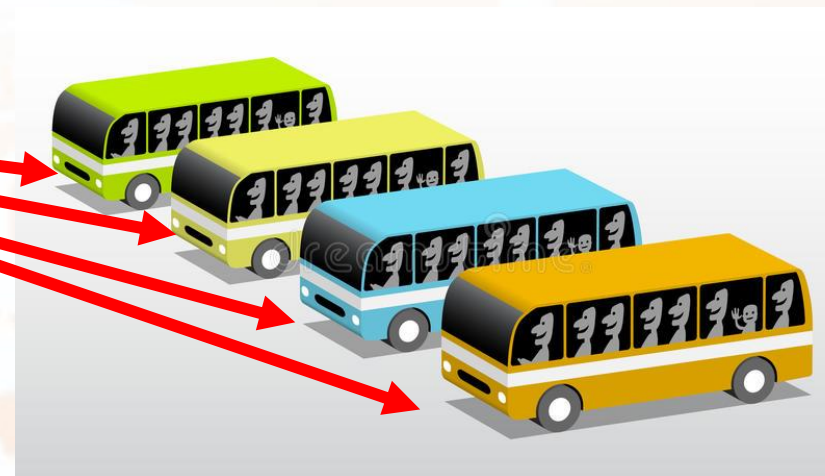
Resolución



Ángel

Beto

Carlos

...
...
...


N° maneras: $4 \times 4 \times 4 - 4 = 60$

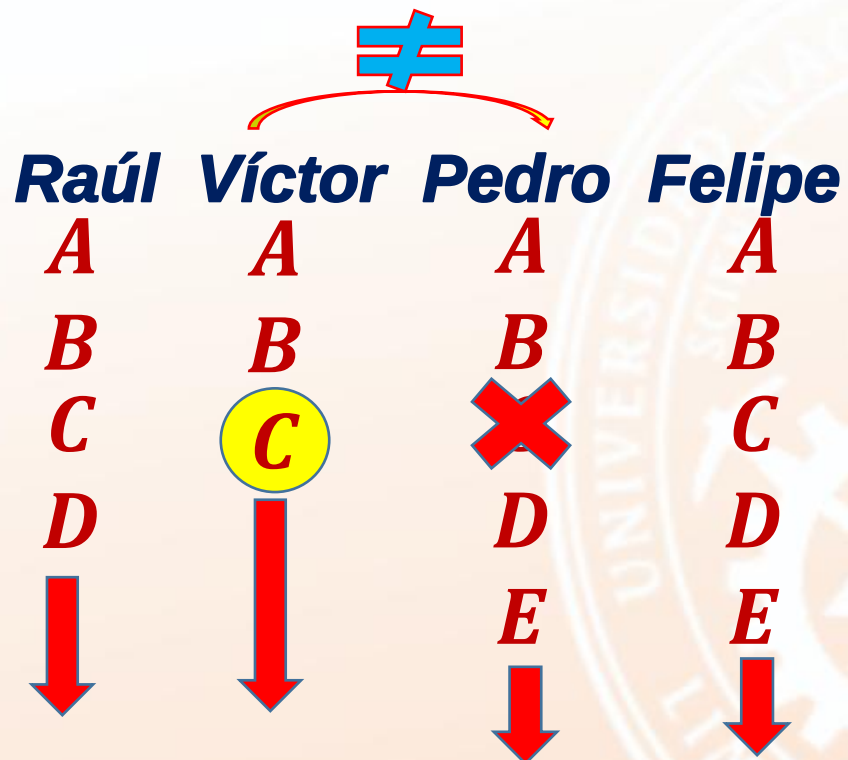
Total de
casos

casos donde todos
van a un mismo bus

Aplicación 3

Cuatro amigos Raúl, Felipe, Pedro y Víctor visitan el Cuzco y encuentran 5 hoteles (A; B; C; D y E), para poder hospedarse, ¿de cuántas formas diferentes pueden escoger sus hoteles, si Raúl no desea hospedarse en el hotel "E", Víctor solo prefiere los hoteles A; B y C y Pedro en un hotel distinto al de Víctor?

Resolución:



$$\# \text{ Formas : } 4 \times 3 \times 4 \times 5 = 240$$



Principio de la Adición

Si un evento A se puede realizar de p formas diferentes y un segundo evento B se puede realizar de q formas diferentes, además **no es posible realizar los dos eventos a la vez** ($A \cap B = \emptyset$), entonces la realización del evento A o B (ocurre solo uno de los eventos) se podrá hacer de: $p + q$ formas diferentes.

Ejemplo 2:

Carlos debe comprar un artículo electrónico que se venden en dos centros comerciales, en el primero hay 6 tiendas que venden el artículo y en el segundo 5 tiendas, ¿cuántas formas diferentes tiene Carlos de comprar el artículo?

Resolución:



0



$$\text{N}^\circ \text{ de maneras} = 6 + 5 = 11$$

Aplicación 4

Raúl está indeciso si postular a la Facultad de Ciencias de la UNI donde hay 5 especialidades o a la Facultad de Ingeniería Mecánica donde hay 4 especialidades. Si se permite elegir dos opciones por facultad (indicando su prioridad), ¿cuántas maneras diferentes tiene de elegir su prioridad?

Resolución:



- Matemática
- Física
- Química
- Ingeniería Física
- Ciencias de la Computación



- Ingeniería Mecánica
- Ingeniería Mecánica y Eléctrica
- Ingeniería Mecatrónica
- Ingeniería Naval

$$N^{\circ} \text{ maneras: } 5 \times 4 + 4 \times 3 = 32$$

Aplicación 5 (Prob. 242)

Los alumnos del quinto año de un colegio, como viaje de promoción irán a la ciudad de Arequipa y evalúan las siguientes propuestas: por vía aérea hay 4 aerolíneas que realizan el vuelo directo de Lima a Arequipa y hay 5 empresas de transporte terrestre que realizan el viaje directo, otra opción es viajar por vía avión a Juliaca hay 3 aerolíneas que realizan ese viaje y luego hay 4 empresas de transporte terrestre que van de Juliaca a Arequipa. ¿Cuántas formas diferentes tienen para realizar el viaje de promoción?

A) 12

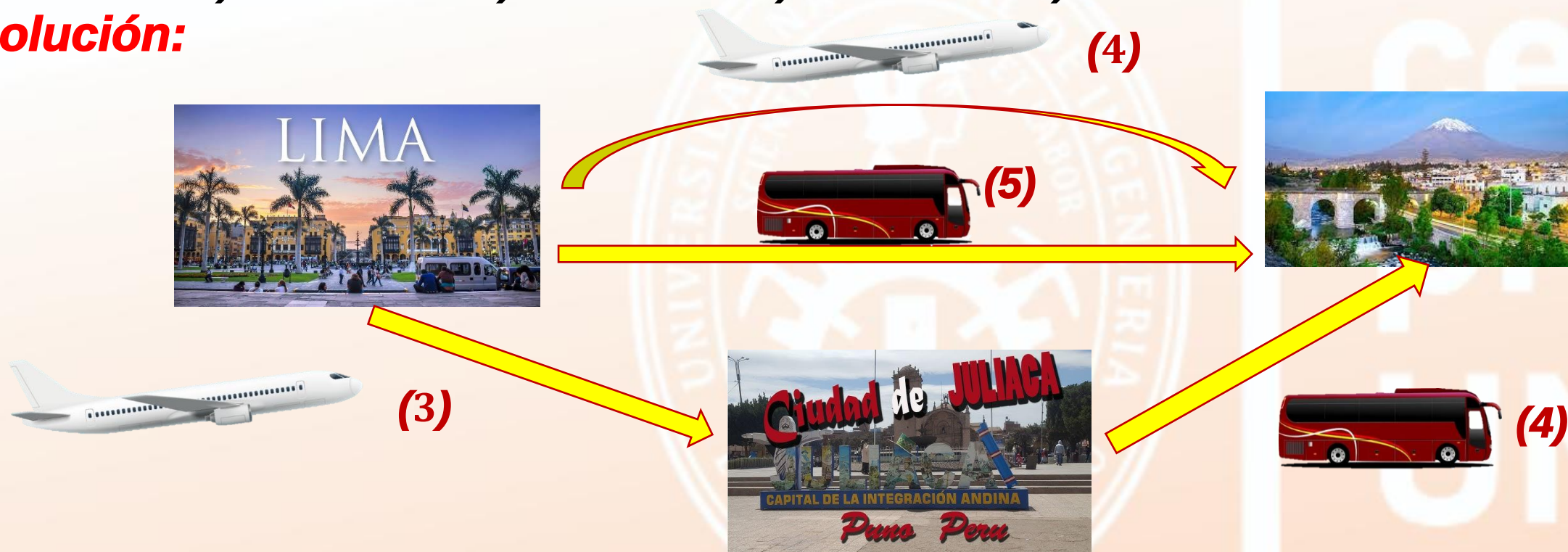
B) 21

C) 24

D) 32

E) 36

Resolución:



$$N^{\circ} \text{ formas: } 4 + 5 + 3 \times 4 = 21$$

Factorial de un número

Sea n un número entero positivo, se define el factorial de n , como el producto de todos los números enteros consecutivos desde 1 hasta n , este producto se denota por $n!$.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n, n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo 3:

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4}_{4!} \times 5 = 120 \quad \rightarrow \quad 5! = 4! \times 5$$

Entonces:

$$n! = (n - 1)! \times n$$

$$n! = (n - 2)! \times (n - 1) \times n$$

Además:

$$\begin{aligned} 8! &= 7! \times 8 \\ 8! &= 6! \times 7 \times 8 \\ 8! &= 5! \times 6 \times 7 \times 8 \end{aligned}$$

Observación: $1! = 1$

Convencionalmente: $0! = 1$

Técnicas de conteo

PERMUTACIÓN

Forma grupos ordenados, es decir, interesa el orden de los elementos

**PERMUTACIÓN
LINEAL CON
ELEMENTOS
DIFERENTES**

**PERMUTACIÓN
LINEAL CON
ELEMENTOS
REPETIDOS**

**PERMUTACIÓN
CIRCULAR**
(Los elementos son diferentes)

COMBINACIÓN

*Forma grupos donde **NO** interesa el orden de los elementos*

**COMBINACIÓN
LINEAL CON
REPETICIÓN
DE
ELEMENTOS**

**COMBINACIÓN
LINEAL CON
ELEMENTOS
DIFERENTES**

1. Permutación lineal con elementos diferentes

También se le conoce como **variación**. El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados en grupos de k elementos, donde: $k \leq n$, está dado por:

$$P_{(n,k)} = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

también:

$$P_k^n = \underbrace{n \cdot (n-1)(n-2) \dots}_{k \text{ factores}}$$

Nos indica que de un total de n elementos serán ordenados de k en k .
donde: $n; k \in \mathbb{N}$

Observación:

Si consideramos $k = n$, es decir, la permutación de los n elementos, (tomados todos a la vez) es:

$$P_n^n = P_{(n)} = n!$$

Estas agrupaciones se diferencian entre sí, sólo por el orden de sus elementos.

Aplicación 6

Alan, Jorge y Pablo y seis amigos se ubican en una fila de 9. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar de modo que Pablo quede al centro de la fila y a sus dos costados siempre esté Alan y Jorge?

Resolución

Son 9 personas: Alan, Jorge, Pablo y seis amigos: $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ y A_6 .

FIJO

A_1	A_2	A_3	ALAN	PABLO	JORGE	A_4	A_5	A_6
-------	-------	-------	------	-------	-------	-------	-------	-------

Permutación lineal
de 6 elementos

Alan y Jorge
pueden permutar

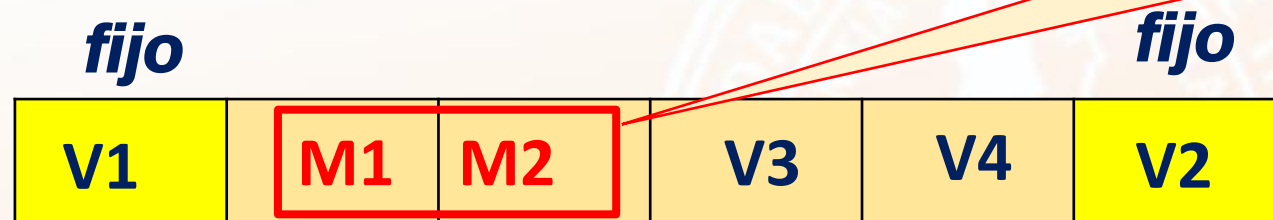
$$\# \text{ maneras: } P_{(6)} \times P_{(2)} = 6! \times 2! = 1\,440$$

Aplicación 7

Un grupo de seis amigos entre ellos cuatro varones y dos mujeres deben ubicarse en una fila con seis asientos, ¿de cuántas formas pueden ubicarse si a los extremos deben estar dos varones y las mujeres deben estar juntas?

Resolución

Hay 4 varones (V) y 2 mujeres (M)



pueden permutar
de lugar

$$3! \times 2! = 12 \text{ formas}$$

4

3

$$\# \text{ formas} = 4 \times 12 \times 3 = 144$$

Aplicación 8

En la final de una prueba de atletismo participan 8 atletas, ¿de cuántas formas diferentes pueden llegar a la meta, si el atleta de USA llega después del atleta de Jamaica y antes que el atleta de Canadá? Considere que solo hay un representante por cada país y no hay empates.

Resolución:

1	2	3	4	5	6	7	8
	Jamaica		USA		Canadá		

N° formas que se pueden dar las 8 posiciones: $8! = 40\ 320$

Queremos los casos que USA llega después de Jamaica y antes que Canadá

Existen $3! = 6$ formas de permutar las posiciones de Jamaica, USA y Canadá

Pero solo una de estas posiciones nos interesa

$$\text{Cantidad de formas: } \frac{8!}{3!} = \frac{40\ 320}{6} = 6\ 720$$

2. Permutación lineal con elementos repetidos

El número de permutaciones distintas de n elementos (tomando todos) en donde hay n_1 objetos iguales entre si de un tipo; otros n_2 objetos iguales entre si de un segundo tipo y así sucesivamente; está dado por la siguiente relación:

$$PR_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k}^n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

donde:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$$

Ejemplo 4 : Luis decide que irá tres días al gimnasio (G), dos días al sauna (S) y un día hará dieta (D), cada actividad debe ser realizada una por día y de lunes a sábado. ¿De cuántas formas diferentes puede elaborar la programación de sus actividades?

Resolución:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
G	G	G	S	S	D

El total de maneras se obtiene permutando los elementos, entonces:

$$PR_{3, 2, 1}^6 = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{720}{6 \times 2 \times 1} = 60 \text{ maneras diferentes}$$

Aplicación 9

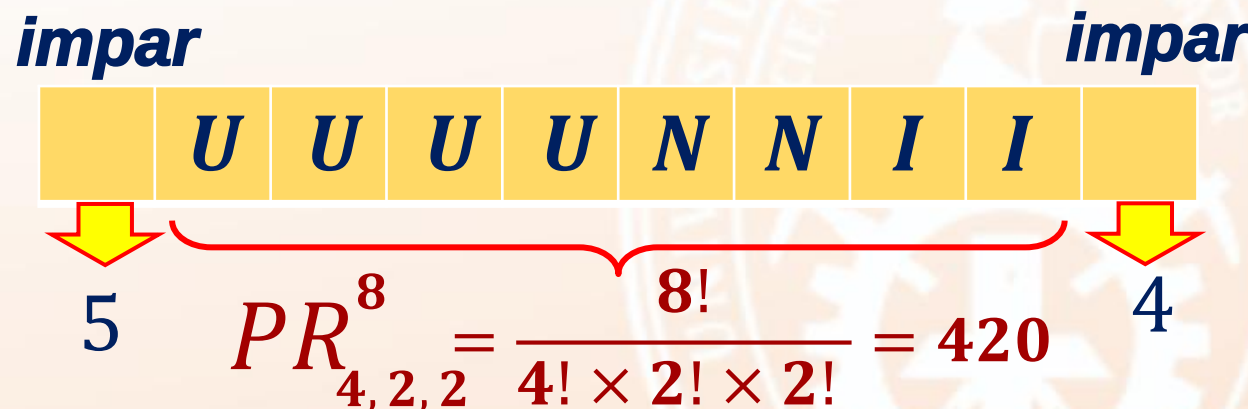
Una contraseña de un correo institucional de una empresa debe estar conformada por dos dígitos impares diferentes que deben ir al inicio y al final, además de 8 letras. Si para crear una contraseña solo debemos usar 4 letras U, 2 letras N y 2 letras I, ¿cuántas contraseñas diferentes se pueden crear?

Resolución

Para crear la contraseña tenemos

Dígitos impares: 1, 3, 5, 7 y 9

Letras: 4U, 2N y 2I



Cantidad de contraseñas: $5 \times 420 \times 4 = 8\,400$

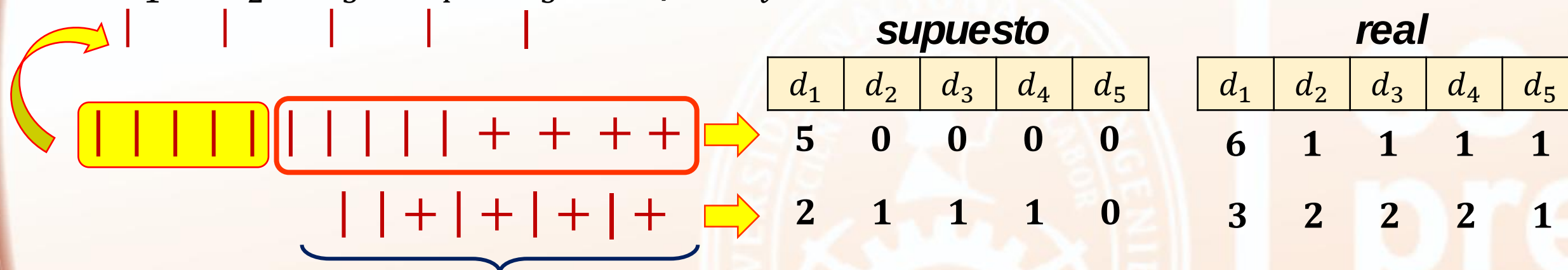
Aplicación 10

Se lanzan cinco dados de tamaños diferentes, ¿en cuántos casos obtenemos 10 como suma de los resultados?

Resolución:

Sean d_1, d_2, d_3, d_4 y d_5 los resultados obtenidos en los dados

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 10; \quad d_i: 1, 2, 3, 4, 5 \text{ o } 6$$



Cada permutación que hagamos nos genera un caso diferentes

Debemos permutar 9 elementos: 5 (|) y 4 (+)

$$PR_{5,4}^9 = \frac{9!}{5! \times 4!} = 126 \text{ casos diferentes}$$

3. Permutación circular

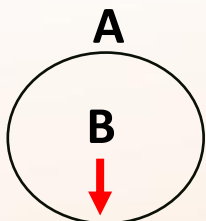
Son agrupaciones o arreglos formando una línea cerrada, donde no hay primer ni último elemento. Dos permutaciones circulares son diferentes entre sí cuando uno de ellos no resulta de una rotación del otro.

Ejemplo 5: Ordenar en forma circular los elementos *A*, *B*, *C* y *D*

Fijamos un elemento como referencia

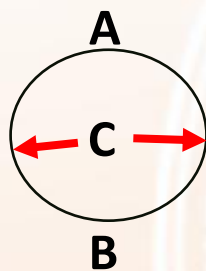
Ubicamos a *B*

Una sola opción



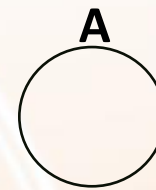
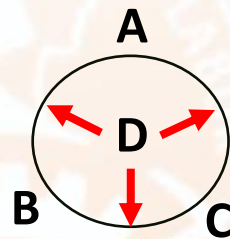
Ubicamos a *C*

Dos opciones



Ubicamos a *D*

Tres opciones



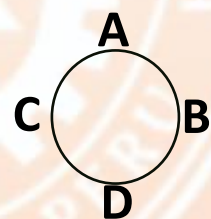
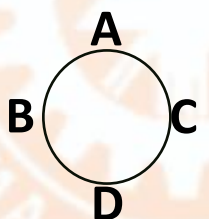
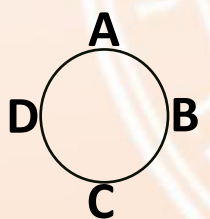
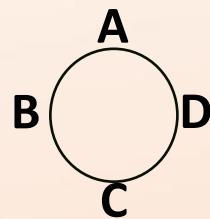
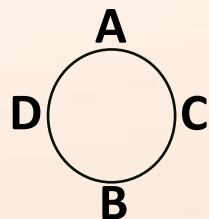
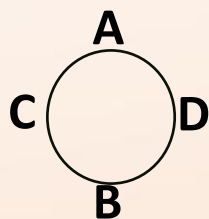
Una sola opción

Entonces:

Nº ordenamientos =
 $1 \times 1 \times 2 \times 3 = 3! = 6$

A B C D

Las 6 permutaciones son:



El número de permutaciones circulares de 4 elementos es $3! = 6$

Permutación circular

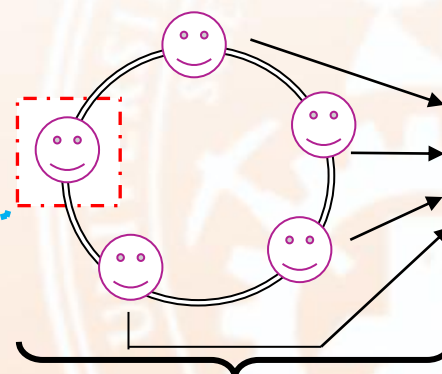
En general El número de permutaciones circulares diferentes de n elementos es:

$$PC_n = (n - 1)!$$

Ejemplo 6: ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse 5 personas alrededor de una mesa circular?

Método 1:

Tomamos este elemento como referencial (posición fija).



Estos elementos se ordenarán respecto al elemento fijo.



Ordenar 4 elementos: $P_{(4)} = 4! = 24$

Método 2: Utilizando la fórmula: $PC_5 = (5 - 1)! = 4! = 24$

Aplicación 11

¿De cuántas maneras diferentes se podrán ubicar ocho personas alrededor de una fogata, si dos de ellas Ana y Tom no deben estar juntos?

Resolución

Por complemento

Total de casos



maneras:

$$\underbrace{PC_8}_{7!}$$

—

Ana y Tom juntos



Ana y Tom
permutan
internamente

Permutamos
circularmente
7 elementos

$$\underbrace{PC_7}_{6!} \times 2! = 3\,600$$

COMBINACIÓN

Son los diferentes arreglos de k elementos que se pueden formar con los n elementos de un conjunto determinado, se debe tener en cuenta que al formar los grupos *no interesa el orden de ubicación de los elementos*.

Notación:

$$\binom{n}{k} \text{ o } C_k^n$$

Nos indica que de un total de n elementos los agruparemos de k en k

El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados en grupos de k elementos, donde: $k \leq n$, está dado por:

$$C_{(n,k)} = C_k^n = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

También:

$$C_k^n = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \dots}^{k \text{ factores}}}{1.2.3 \dots k}$$

Ejemplo:

$$C_3^{10} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$$

$$C_5^{12} = \frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} = 792$$

Diferencia entre permutación y combinación

Ejemplo: Con los elementos del conjunto $\{a, b, c, d\}$ se tiene:

	Permutaciones	Combinaciones
De 2 en 2	ab, ac, ad, bc, bd, cd ba, ca, da, cb, db, dc 12 permutaciones	ab, ac, ad, bc, bd, cd 6 Combinaciones
De 3 en 3	abc, abd, acd, bcd acb, adb, adc, bdc bac, bad, cad, cbd, bca, bda, cda, cdb, cab, dab, dac, dbc, cba, dba, dca, dcb 24 permutaciones	abc; abd; acd, bcd 4 Combinaciones

Aplicación 12

De un grupo de seis enfermeras y cuatro técnicas en enfermería, se van a formar brigadas de cinco integrantes para el proceso de vacunación, estas brigadas deben estar conformadas por al menos una enfermera y por lo menos dos técnicas. ¿Cuántas brigadas distintas se pueden formar?

Resolución:

De 6 enfermeras (E) y 4 técnicas (T) se forman brigadas de 5 integrantes

Al menos 1E y al menos 2T

Casos

(1E y 4T)

o

(2E y 3T)

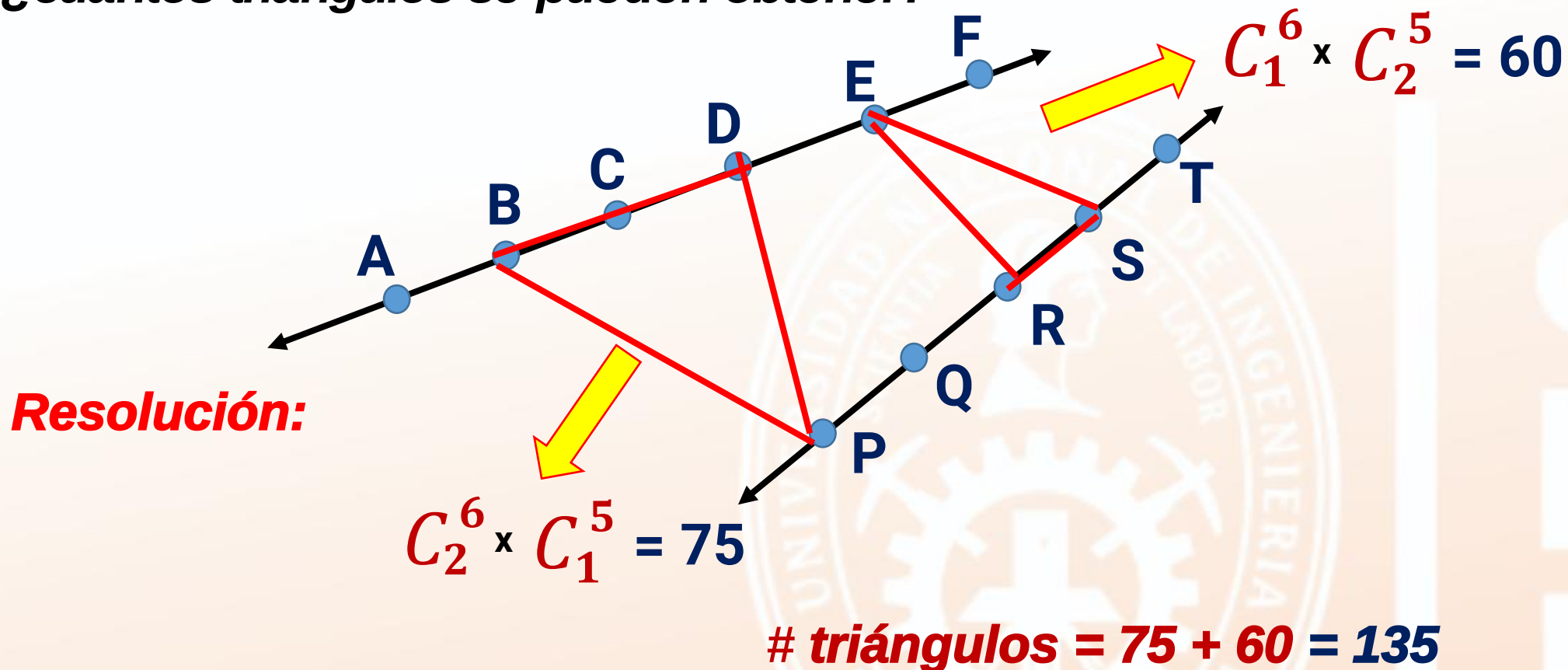
o

(3E y 2T)

$$\text{Total} = C_1^6 \cdot C_4^4 + C_2^6 \cdot C_3^4 + C_3^6 \cdot C_2^4 = 186$$

Aplicación 13

Dados los puntos A, B, C, D, E y F sobre una recta y los puntos P, Q, R, S y T sobre otra recta como se muestra en la gráfica, si se unen tres puntos, ¿cuántos triángulos se pueden obtener?



Combinación con repetición de elementos

- . Se consideran “ n ” elementos diferentes.
- . Se formará grupos de “ k ” elementos donde no interesa el orden de ellos.
- . ***En el grupo se puede repetir un mismo elemento; es decir, en un determinado grupo, un elemento puede aparecer varias veces.***

En dichas condiciones, el número de combinaciones está dada por:

$$CR_k^n = C_k^{n+k-1}$$

donde: $k < n$; $k = n$
ó $k > n$

Ejemplo 7:

Si tenemos 5 objetos {a, b, c, d, e}, podemos formar grupos de 2 de ellos, donde se pueden repetir los elementos de un mismo grupo, como por ejemplo: (a, a); (a, b); (a, c);

Entonces decimos que cada grupo es una combinación con repetición de estos 5 elementos formando grupos de 2.

(a, a); (a, b); (a, c); (a, d); (a, e); (b, b); (b, c); (b, d); (b, e); (c, c); (c, d); (c, e); (d, d); (d, e); (e, e)

15 combinaciones

Utilizando la fórmula:

$$CR_2^5 = C_2^{5+2-1} = C_2^6 = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$$

Aplicación 14

El abuelo Pedro recibe la visita de sus seis nietos, el va a la tienda a comprarle una galleta para cada uno de ellos, pero en la tienda solo tienen cuatro sabores. ¿De cuántas formas diferentes puede elegir las galletas que va a comprar?

Resolución:

Tenemos 4 elementos diferentes $\rightarrow n = 4$

Se forman grupos de 6 elementos donde hay repetición $\rightarrow k = 6$

Usando combinación con repetición

$$CR_k^n = C_k^{n+k-1}$$

$$CR_6^4 = C_6^{4+6-1} = C_6^9 = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{6! \times 7 \times 8 \times 9}{6! \times 6} = 84$$

Propiedades de los números combinatorios

Sean: $n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $n \geq k$

1. Igualdad de números combinatorios

Si: $C_k^n = C_r^m \rightarrow (i) m = n \wedge k = r \quad \text{ó} \quad (ii) m = n = k + r$

2. Combinatorios complementarios

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

Ejemplo: $C_9^{15} = C_{15-9}^{15} = C_6^{15}$

3. Suma de combinatorios

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

Ejemplo: $C_5^8 + C_6^8 = C_6^9$

Observación: $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$

Ejemplo: $C_6^{10} = C_5^9 + C_6^9$

4. Disminución de índices

Disminución de ambos índices:

$$C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$$

Ejemplo: $C_8^{13} = \frac{13}{8} C_7^{12}$

Disminución de índice inferior:

$$C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$$

Ejemplo: $C_5^{13} = \frac{13-5+1}{5} C_{5-1}^{13} = \frac{9}{5} C_4^{13}$

Disminución de índice superior:

$$C_k^n = \frac{n}{n-k} C_k^{n-1}$$

Ejemplo:

$$C_7^{19} = \frac{19}{19-7} C_7^{19-1} = \frac{19}{12} C_7^{18}$$

Resultados Notables:

$$C_0^n = C_n^n = 1$$

$$C_1^n = C_{n-1}^n = n$$

$$C_2^n = C_{n-2}^n = \frac{n(n-1)}{2}$$

5. Binomio de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$n \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, n \geq k$$

Ejemplo:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

PROPIEDADES

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \cdots + n \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

Aplicación 15

Determine el valor de

$$S = \frac{\binom{n}{0}}{2} + \frac{\binom{n}{1}}{4} + \frac{\binom{n}{2}}{6} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{2n+2}$$

Resolución:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1} \right)$$

$$(n+1)S = \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)}{1} \binom{n}{0} + \frac{(n+1)}{2} \binom{n}{1} + \frac{(n+1)}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{(n+1)}{n+1} \binom{n}{n} \right)$$

$$(n+1)S = \frac{1}{2} \left(\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \dots + \binom{n+1}{n+1} \right)$$

$$\Rightarrow (n+1)S = \frac{1}{2} (2^{n+1} - 1) \Rightarrow S = \frac{2^{n+1} - 1}{2(n+1)}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Problema 241

En el próximo ciclo preuniversitario del CEPREUNI, habrá modalidad presencial y virtual cada uno en ambos turnos mañana y tarde. Al momento de inscribirse los alumnos deben elegir la modalidad, si es presencial debe elegir su sede Javier Prado o UNI. César y Jesús son dos alumnos que se van a inscribir, ¿de cuántas maneras diferentes pueden elegir diferente modalidad, pero el mismo turno?

A) 4

B) 6

C) 8

D) 10

E) 12

Resolución:

CESAR	JESUS
P, M, JP	V, M
P, M, UNI	V, M
P, T, UNI	V, T
P, T, JP	V, T

CESAR	JESUS
V, M	P, M, JP
V, M	P, M, UNI
V, T	P, T, UNI
V, T	P, T, JP

SON **8** FORMAS DIFERENTES

CLAVE C



Problema 245

María vende artículos por las redes sociales y debe enviar 2 pedidos a la ciudad de Chiclayo, 3 a la ciudad de Ica y 2 a la ciudad de Huancayo. Se sabe que hay tres agencias que realizan envíos a la región norte del país, cuatro a la región sur y dos a la región centro, ¿cuántas formas diferentes tiene María de elegir las agencias para realizar sus envíos, si para una misma ciudad puede elegir la misma o diferentes agencias para el envío?

A) 12

B) 77

C) 576

D) 1 152

E) 2 304

Resolución:

Chiclayo 1	Chiclayo 2	Ica 1	Ica 2	Ica 3	Huancayo 1	Huancayo 2
------------	------------	-------	-------	-------	------------	------------

AN 1

AN 1

AS 1

AS 1

AS 1

AC 1

AC 1

AN 2

AN 2

AS 2

AS 2

AS 2

AC 2

AC 2

AN 3

AN 3

AS 3

AS 3

AS 3

AS 4

AS 4

AS 4

3

×

3

×

4

×

4

×

4

×

2

×

2

=

2 304

CLAVE E

Problema 246

¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar los números del 1 al 9 en cada uno de los casilleros de la siguiente figura de modo, que el producto de los números que van en cada diagonal termine en la cifra 5?

A) 24

B) 96

C) 192

D) 384

E) 576

Resolución:

Se deben ubicar 4 impares en los 4 lugares

*		*
	5	
*		*

Y el resto Se deben ubicar 4 pares en los 4 lugares

$$n = (4!) \times (4!) = 24 \times 24 = 576$$

CLAVE E

Problema 249

Un grupo de cinco varones y cuatro mujeres, donde Nadia y César son pareja al igual que Mónica y Raúl, van al cine y se sientan en una fila de nueve asientos libres. Si las parejas deben sentarse en los extremos, ¿de cuántas maneras diferentes pueden ordenarse?

A) 240

B) 480

C) 960

D) 1 000

E) 1 020

Resolución:



$$\# \text{ formas} = 2! \times 2! \times 2! \times 5! = 960$$

CLAVE C

Problema 250

¿De cuántas formas diferentes un bote puede ser tripulado por cuatro varones y cuatro mujeres, si Ricardo que es uno de ellos se quiere sentar entre Norma y Rosa que son dos de ellas, además, las personas del mismo sexo no pueden estar juntas en su fila? (según el gráfico del bote)

A) 96

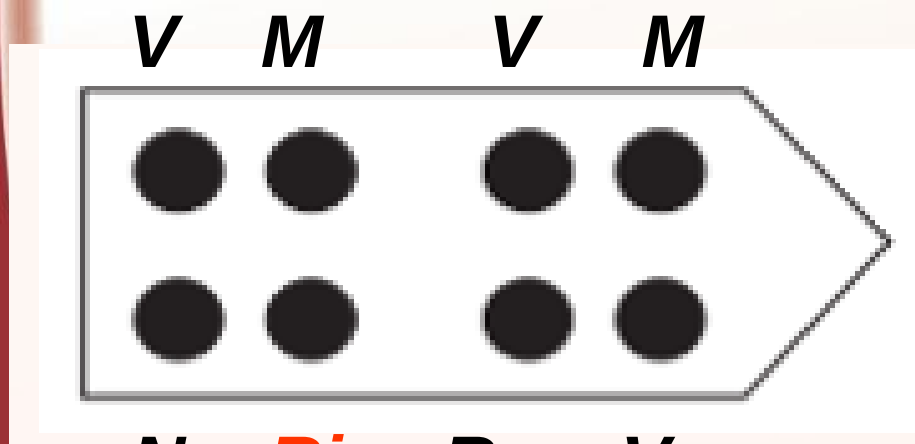
B) 156

C) 172

D) 192

E) 288

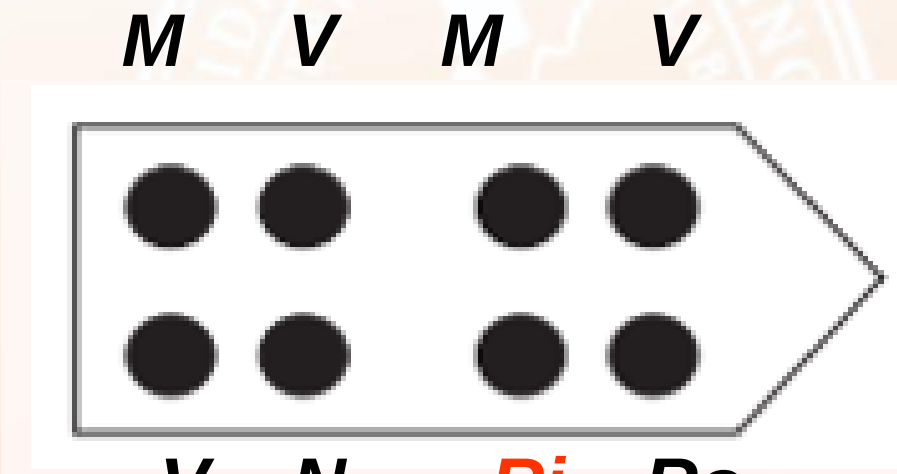
Resolución:



N **Ri** Ro V

Ro **Ri** N V

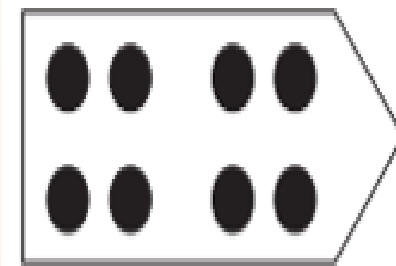
formas = $2(3)(4) = 24$



V N **Ri** Ro

V Ro **Ri** N

formas = $2(3)(4) = 24$



formas = 48

Cambiando de
lado, 48 más

Total : **96**

CLAVE A

Problema 252

De una baraja de 52 cartas se van a extraer al azar cinco de ellas, ¿en cuántos casos diferentes se obtienen exactamente dos ases que sean del mismo color y en total tres cartas de espadas?

A) 1 188

B) 1 298

C) 2 376

D) 2 596

E) 2 662

Resolución:

Si escogemos los 2 ases rojos,

Debemos escoger 3 espadas de 12

$$C_3^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220$$

O Si escogemos los 2 ases negros, ya tenemos una espada, completamos 2 espadas de 12 que quedan, y una de las que quedan que no sea as ni espada.

$$C_2^{12} \times C_1^{36} = \frac{12 \times 11}{1 \times 2} \times 36 = 66 \times 36 = 2376$$

$$\text{total} = 220 + 2376 = \mathbf{2\ 596}$$

CLAVE D

Problema 253

Carlos para su matrimonio ha contratado una orquesta, que en la primera hora debe tocar 3 canciones de cumbia, 5 canciones de salsa y 4 de rock, la condición es que la primera y última canción a tocar en la primera hora deben ser de géneros diferentes. ¿De cuántas formas diferentes la orquesta puede distribuir las canciones a tocar teniendo en cuenta solo el género?

- A) 9 870 B) 11 340 C) 15 120 D) 14 700 E) 19 740

Resolución:

Cumbia 3

Salsa 5

Rock 4

cumbia

salsa



cumbia
salsa

Rock
Rock

$$\# \text{ formas} = 2! \left[PR_{2,4,4}^{10} + PR_{2,5,3}^{10} + PR_{3,4,3}^{10} \right] = 2 \times [3150 + 2520 + 4200] = \mathbf{19\ 740}$$

CLAVE E

Problema 254

Una agencia de turismo, para un fin de semana ofrece un full day al departamento de Ica, son cuatro lugares a visitar que son la Laguna de la Huacachina, la Bahía de Paracas, las Líneas de Nazca y una Vitivinícola. Los tres buses que harán el recorrido deben ir a los cuatro lugares, con la condición que el primer lugar que visitaran debe ser diferentes para cada uno, pero el último lugar debe ser el mismo para los tres buses. Determine de cuántas formas diferentes se puede hacer la programación de los recorridos de los tres buses.

- A) 64 B) 96 C) 120 D) 144 E) 192

Resolución: Es necesario una terna ordenada de 4 lugares

	Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3	Lugar 4
Bus 1	V1			V4
Bus 2	V2			V4
Bus 3	V3			V4

Cada bus escoge dos destinos;

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ formas}$$

$$n = P_3^4 \times 8 = 192$$

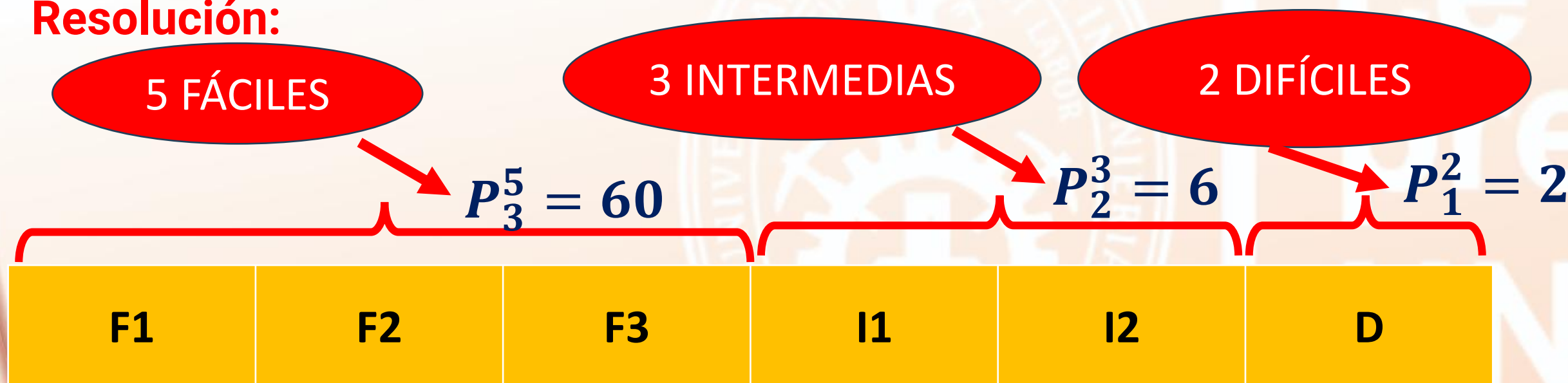
CLAVE E

Problema 255

Para elaborar la cuarta práctica calificada en el curso de Aritmética, se deben colocar tres preguntas fáciles, dos intermedias y una difícil, para ello se dispone un banco con cinco preguntas fáciles, tres intermedias y dos difíciles, ¿de cuántas formas diferentes se pueden elegir las preguntas para la calificada y además las preguntas de nivel fácil deben ir primero, seguido de las preguntas intermedias y la pregunta difícil debe ser la última?

- A) 60 B) 120 C) 360 D) 540 E) 720

Resolución:



$$n = 60 \times 6 \times 2 = 720$$

CLAVE E

Problema 257

¿Cuántos números impares de seis cifras tienen exactamente tres cifras iguales a uno?

A) 4 860

B) 5 040

C) 9 720

D) 9 900

E) 10 080

Resolución:

1	a	1	b	c	1
0			0	0	
2			2	2	
3			3	3	
4			4	4	
5			5	5	
6			6	6	
7			7	7	
8			8	8	
9			9	9	

$$4 \times 9 \times 9 \times 9$$

a	1	1	1	b	c
2				0	3
3				2	5
4				3	7
5				4	9
6				5	
7				6	
8				7	
9				8	
				9	

$$4 \times 8 \times 9 \times 4$$

1	1	1	a	b	c
			0	0	3
			2	2	5
			3	3	7
			4	4	9
			5	5	
			6	6	
			7	7	
			8	8	
			9	9	

$$6 \times 9 \times 9 \times 4$$

a	1	1	b	c	1
2			0	0	
3			2	2	
4			3	3	
5			4	4	
6			5	5	
7			6	6	
8			7	7	
9			8	8	
			9	9	

$$6 \times 8 \times 9 \times 9$$

$$n = 2\,916 + 1\,152 + 1\,944 + 3\,888 = \mathbf{9\,900}$$

CLAVE D

Problema 258

Los diez integrantes de la familia Ramos, han separado en un restaurante dos mesas circulares con cinco asientos cada una, dichas mesas están enumeradas con los números 5 y 6. Si los dos integrantes que son la cabeza de la familia se deben sentar en la misma mesa y juntos. Calcule la cantidad de maneras diferentes en que podrán ser ubicados y ordenados los diez integrantes en estas dos mesas.

A) 8 064

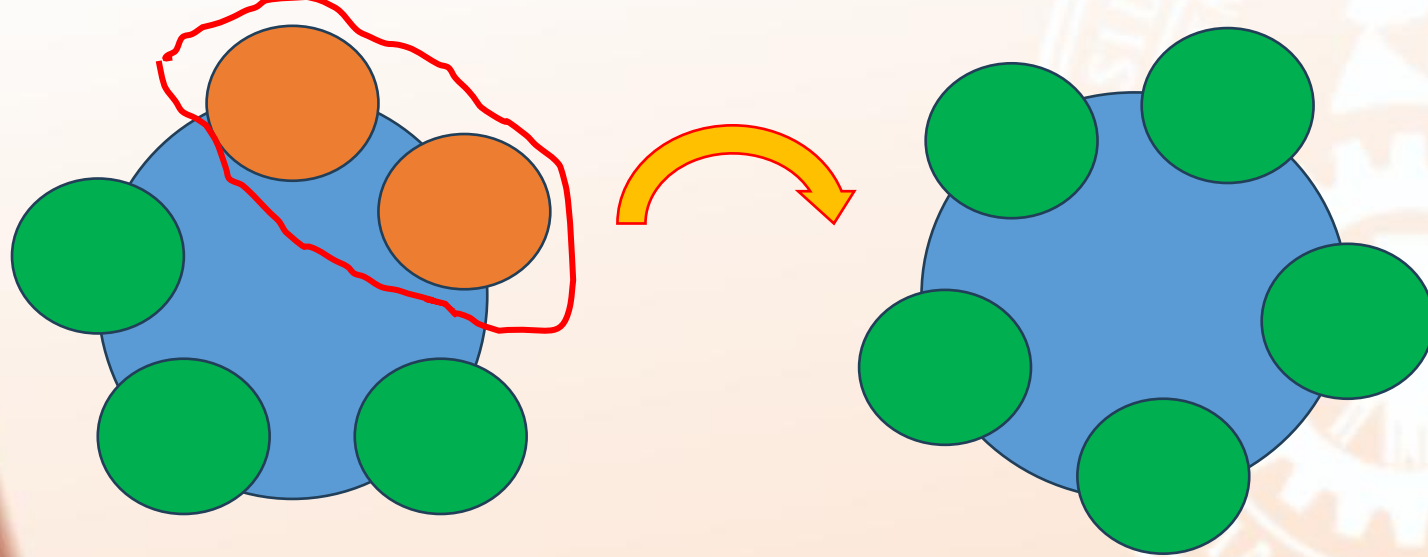
B) 16 128

C) 32 256

D) 36 288

E) 64 512

Resolución:



Escoger 3 de 8 y ordenar circularmente 4 y dos juntos

Escoger 5 de 5 y ordenar circularmente 5

CLAVE C

$$n = C_3^8 \times PC(4) \times 2! \times C_5^5 \times PC(5) \times 2 = 56 \times 6 \times 2 \times 24 \times 2 = 32\,256$$

Problema 263

En la reunión de los 22 profesores del curso de Aritmética, para ubicarse se disponen de tres mesas (I, II y III) con seis asientos cada una y cuatro carpetas individuales, ¿de cuántas formas diferentes se pueden ubicar?

A) 21!/216

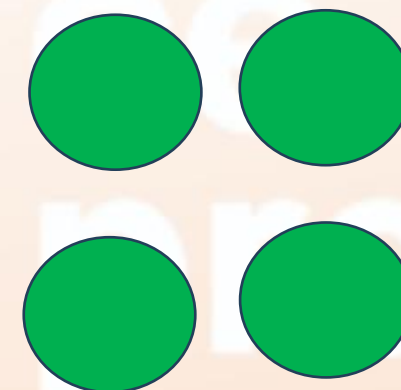
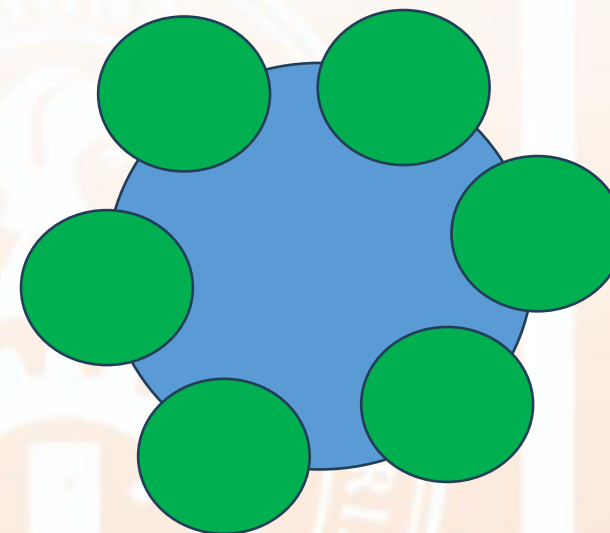
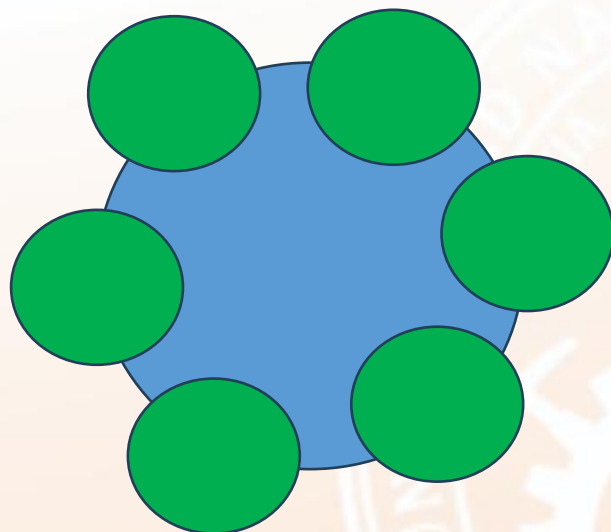
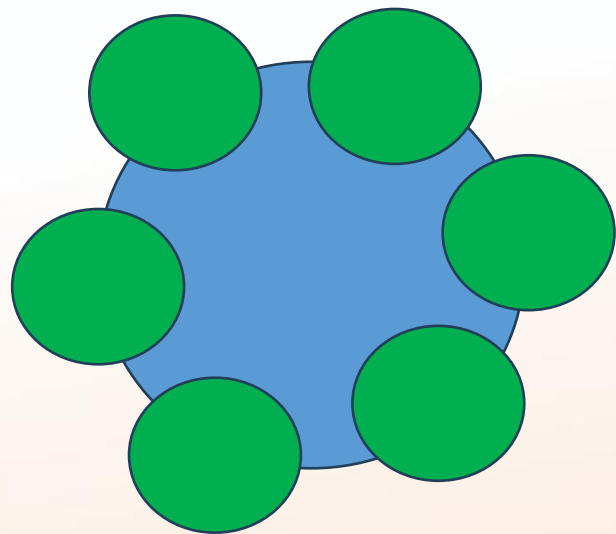
B) 22!/108

C) 20!/36

D) 22!/27

E) 22!/216

Resolución:



$$n = C_6^{22} \times PC(6) \times C_6^{16} \times PC(6) \times C_6^{10} \times PC(6) \times C_4^4 \times P(4)$$

$$n = \frac{22!}{16! \times 6!} \times 5! \times \frac{16!}{10! \times 6!} \times 5! \times \frac{10!}{4! \times 6!} \times 5! \times 4! = \frac{22!}{216}$$

CLAVE E

Problema 265

luego de reducir la expresión $M = \frac{\binom{20}{10} \times \binom{26}{20} - \binom{19}{9} \times \binom{26}{6}}{\binom{25}{5} \times \binom{19}{9} + \binom{25}{6} \times \binom{19}{10}}$

Se obtiene:

A) $\binom{20}{1}$

B) $\binom{20}{20}$

C) $\binom{25}{24}$

D) $\binom{19}{18}$

E) $\binom{26}{25}$

Resolución:

$$M = \frac{\binom{20}{10} \times \binom{26}{20} - \binom{19}{9} \times \binom{26}{20}}{\binom{25}{5} \times \binom{19}{9} + \binom{25}{6} \times \binom{19}{9}} = \frac{\binom{26}{20} \times [\binom{20}{10} - \binom{19}{9}]}{\binom{19}{9} \times [\binom{25}{5} + \binom{25}{6}]}$$

$$M = \frac{\binom{26}{20} \times [\cancel{\binom{19}{9}} + \binom{19}{10} - \cancel{\binom{19}{9}}]}{\binom{19}{9} \times [\binom{25}{5} + \binom{25}{6}]} = \frac{\binom{26}{6} \times \binom{19}{10}}{\binom{19}{10} \times [\binom{26}{6}]} = 1 = \binom{20}{20}$$

CLAVE B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADICIONALES



Problema 266

En la final de una prueba de 100 metros planos han clasificado 8 atletas entre ellos A, B, C y D, ¿en cuántos casos diferentes se puede dar la llegada de los atletas, si D siempre llega después que A, B y C, además no hay empates?

A) 2 520

B) 3 360

C) 5 040

D) 6 720

E) 10 080

Resolución: D llega después de A, B y C.

casos:

D		A			B		C
---	--	---	--	--	---	--	---

$$7! = 5\,040$$

	D		B		C		A
--	---	--	---	--	---	--	---

$$P_1^4 \times P_6^6 = 2\,880$$

		D	C		B		A
--	--	---	---	--	---	--	---

$$P_2^4 \times P_5^5 = 1\,440$$

			D	B	C		A
--	--	--	---	---	---	--	---

$$P_3^4 \times P_4^4 = 576$$

				D	C	B	A
--	--	--	--	---	---	---	---

$$P_4^4 \times 3! = 144$$

Total: 10 080

CLAVE E

Problema 267

¿Cuántas palabras de seis letras, que contengan dos vocales diferentes y cuatro consonantes distintas, se pueden formar con cuatro vocales incluyendo la e y seis consonantes incluyendo la s, de manera que empiecen con e y contengan a s?

A) 2 160

B) 3 600

C) 7 200

D) 9 600

E) 10 800

Resolución:

3 vocales
+e

Escoger una vocal

5 consonantes
+e

Escoger 3 consonantes

Y ordenar 4
letras


$$n = C_1^3 \times C_3^5 \times 5! = 3 \times \frac{5 \times 4}{1 \times 2} \times 120 = 3\ 600$$

CLAVE B

Problema 242

Los alumnos del quinto año de un colegio, como viaje de promoción irán a la ciudad de Arequipa y evalúan las siguientes propuestas: por vía aérea hay 4 aerolíneas que realizan el vuelo directo de Lima a Arequipa y hay 5 empresas de transporte terrestre que realizan el viaje directo, otra opción es viajar por vía avión a Juliaca hay 3 aerolíneas que realizan ese viaje y luego hay 4 empresas de transporte terrestre que van de Juliaca a Arequipa. ¿Cuántas formas diferentes tienen para realizar el viaje de promoción?

A) 12

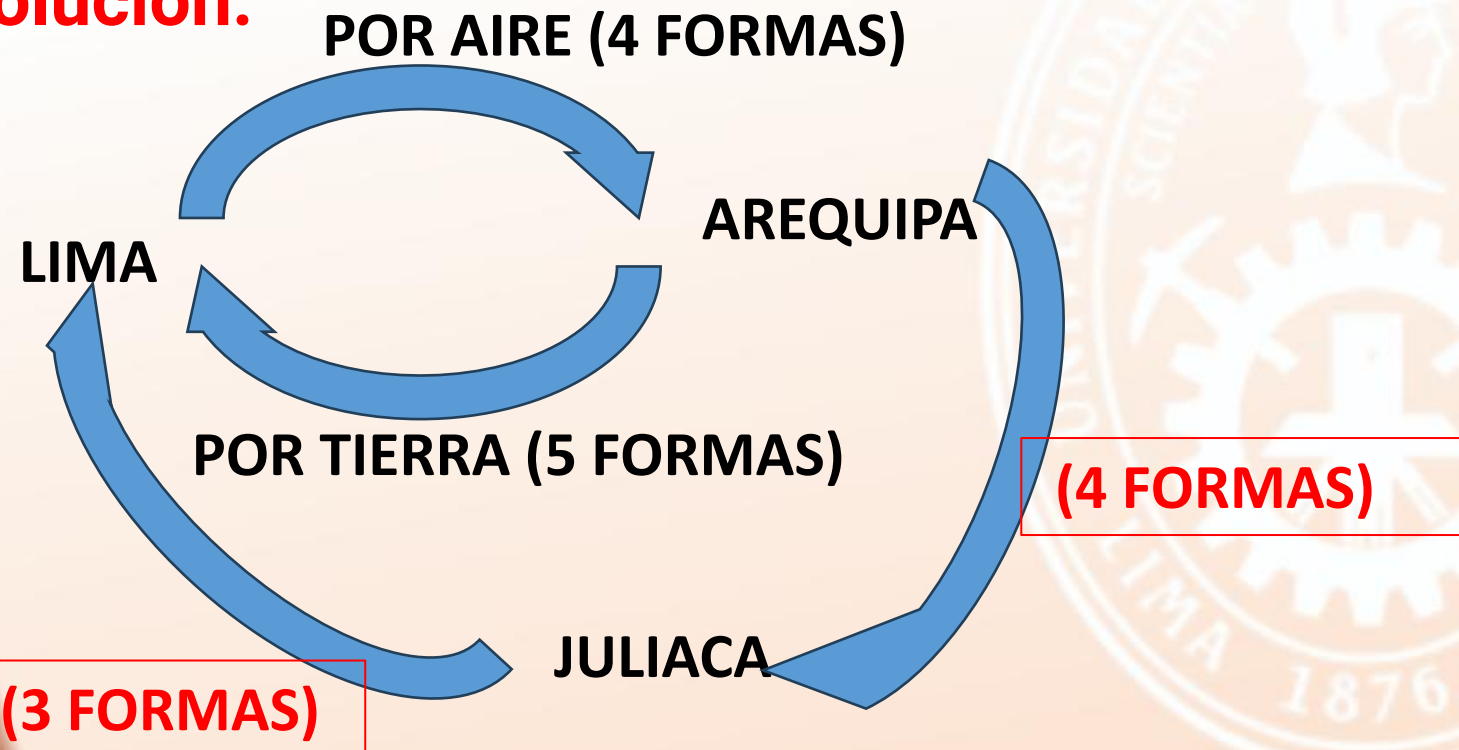
B) 21

C) 24

D) 32

E) 36

Resolución:



$$n = 4 + 5 + 3 \times 4$$

$$n = 21$$

CLAVE B

Problema 243

Un cuadrado está dividido en nueve cuadrados iguales. ¿De cuántas maneras diferentes se puede pintar cada uno de estos nueve cuadrados con color verde, amarillo y rojo, de modo que en cada fila y columna haya un cuadrado de cada color?

A) 6

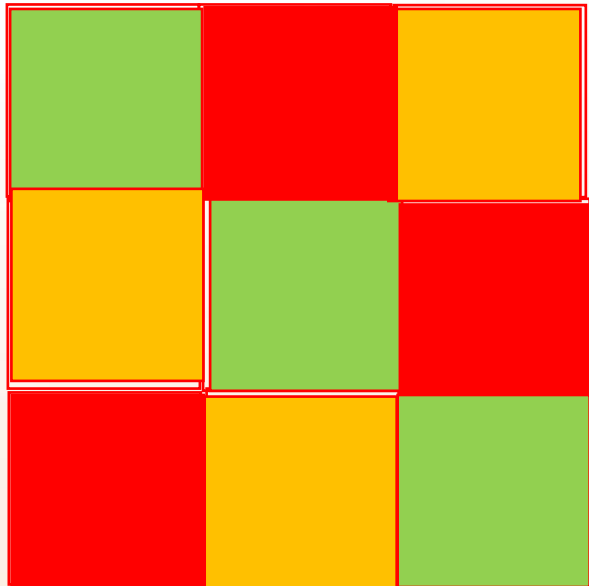
B) 9

C) 10

D) 12

E) 15

Resolución:



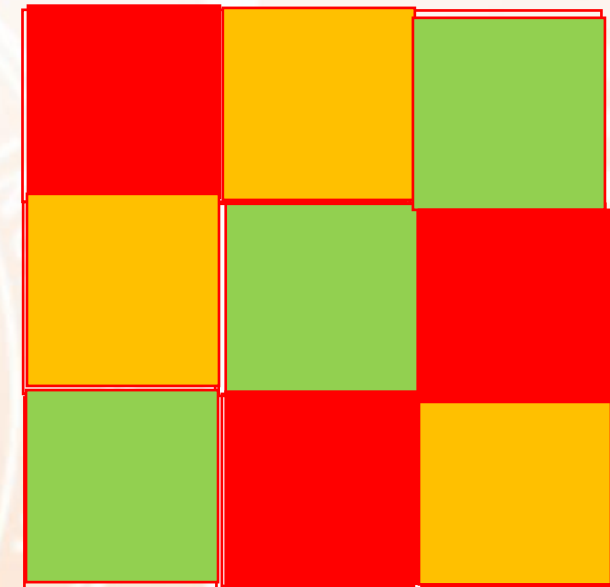
Color uno diagonal

Color dos

Color 3

Permutando $3! = 6$

Total de casos = 12



CLAVE D

Problema 244

Al lanzar tres dados, ¿en cuántos casos obtenemos como producto un número de tres cifras?

A) 20

B) 21

C) 22

D) 23

E) 24

Resolución:

resultados

6 , 6 , 6 1 caso

6 , 6 , 5 3 casos

6 , 6 , 4 3 casos

6 , 6 , 3 3 casos

6 , 5 , 4 6 casos

6 , 5 , 5 3 casos

5 , 5 , 5 1 caso

5 , 5 , 4 3 casos

23 casos

CLAVE D

Problema 247

¿De cuántas formas diferentes al ordenar las letras de la palabra COLABORADORA, se puede leer la palabra ORADOR, pero no la palabra LABOR?

A) 1 248

B) 2 496

C) 2 520

D) 5 016

E) 5 034

Resolución:

O C **ORADOR** L A B A

PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN DE 7 ELEMENTOS,
SE REPITEN 2 LETRAS A.

$$PR_2^7 = \frac{7!}{2!} = 2\,520$$

$$n = 2\,520 - 24 = 2\,496$$

LABORADOR CO

PERMUTACIÓN DE 4 ELEMENTOS . $4! = 24$

CLAVE B

PROBLEMA 248

En el curso de Estadística hay tres secciones A, B y C, se va elegir una comisión formado por tres alumnos que desempeñaran los cargos de presidente, secretario y tesorero, si por cada sección hay 8 candidatos y se sabe que el presidente y el tesorero no deben pertenecer a la misma sección. ¿De cuántas formas diferentes se puede conformar esta comisión?

A) 4 328

B) 4 884

C) 8 448

D) 25 344

E) 50 688

Resolución:

Puede ser de
cualquier sección

Cualquiera de las otras
dos secciones

Cualquiera otra
persona

$$\begin{array}{ccc} \text{Presidente} & \text{Tesorero} & \text{Secretario} \\ \hline 24 & \times & 16 & \times & 22 & = & 8\,448 \end{array}$$

CLAVE C

Problema 251

José, Rosa, sus tres hijos y cuatro nietos se van a tomar una foto para el recuerdo, en la primera fila estarán los nietos y los demás integrantes en la segunda fila, con la condición que José Y Rosa se ubiquen en los extremos. Determine de cuántas formas diferentes se pueden ubicar para tomarse la foto del recuerdo.

A) 144

B) 192

C) 240

D) 288

E) 360

Resolución:



Permutación
de José y
Rosa

$$2 \times 3! \times 4! = 288$$

Permutación
de sus 3
hijos

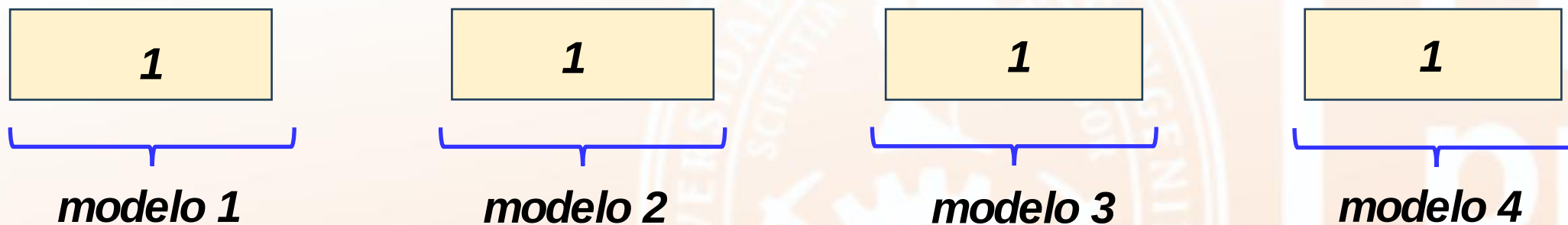
Permutación
de sus 4
nietos

PROBLEMA 256

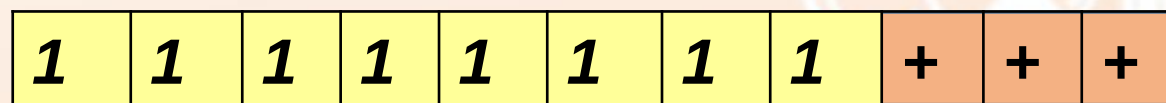
Ana es una comerciante y va a una tienda en Gamarra para comprar una docena de casacas, en dicha tienda hay cuatro modelos diferentes de las casacas que quiere, ¿cuántas opciones de compra tiene si debe comprar al menos una camisa de cada modelo y hay más de 10 casacas de cada modelo?

- A) 55 B) 165 C) 210 D) 220 E) 495

Resolución: Compra al menos una camisa de cada modelo



Usando separadores: el problema se reduce a buscar las formas de obtener suma 8



N° de formas diferentes:

$$PR_{8,3}^{11} = 165$$

Rpta. B

Problema 259

Se tiene un polígono regular de 30 lados, ¿cuántos triángulos podemos obtener uniendo tres vértices del polígono, si ningún lado del polígono debe ser un lado del triángulo?

A) 3 200

B) 3 250

C) 3 280

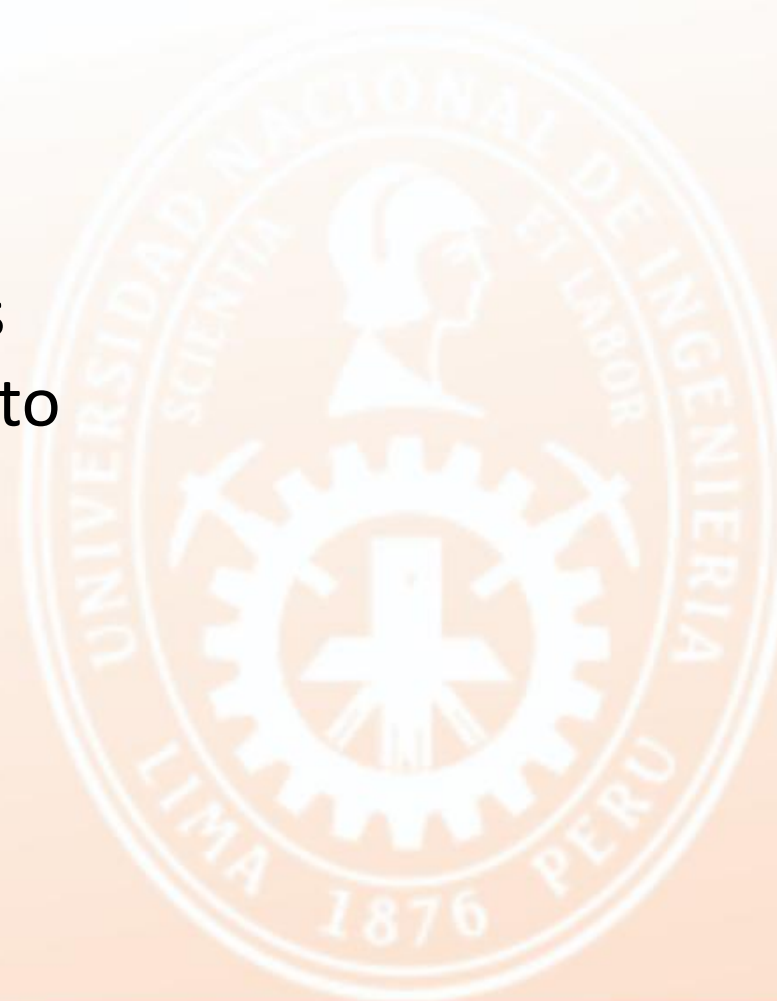
D) 4 030

E) 4 060

Resolución:

$$C_3^{30} - 30 \times 27 = 3250$$

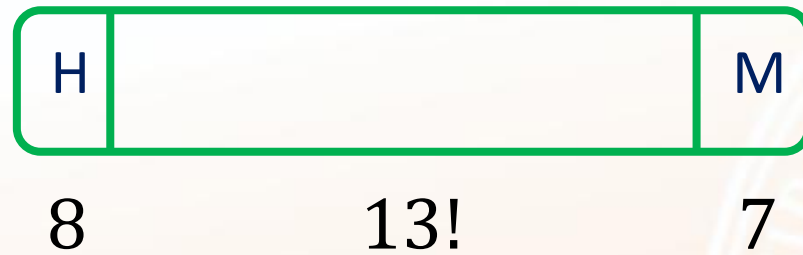
Casos totales Fijamos un punto Elegimos otro punto



Problema 260

Los ocho niños y siete niñas de inicial en el recreo deben formar una fila, de modo que al inicio de la fila se ubique una niña y al final un niño. Calcule la cantidad de formas diferentes que pueden ubicarse

Resolución:



$$\text{Cantidad de formas} = 8 \times 13! \times 7 = 4 \times 14!$$

Problema 261

Karina tiene 12 amigas de confianza, para el fin de semana debe invitar a 8 de ellas a su cumpleaños, su mejor amiga Alicia debe estar invitada, pero hay otras dos que no pueden asistir juntas a ninguna reunión, ¿de cuántas maneras diferentes puede invitar a sus amigas para su cumpleaños?

- A) 196 **B) 204** C) 285 D) 330 E) 346

Resolución

Debe invitar solo a 7 amigas, pues Alicia ya lo está: $C_7^{11} = a$

Invitar a las dos que no se llevan: $C_5^9 = b$

∴ La cantidad de maneras es: $a - b = 204$

Rpta. B

Problema 262

Se disponen de siete pares de guantes utilizables de siete marcas diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes se puede seleccionar un par de guantes utilizables (uno derecho y uno izquierdo) de tal manera que los dos guantes sean de marcas diferentes?

Resolución

A) 42 B) 49 C) 56 D) 84 E) 96

Derechos: A B C D E F G

Izquierdos: a b c d e f g

Por cada derecho, 6 izquierdos: $7 \times 6 = 42$

Rpta. A

Problema 264

Cinco amigos lograron comprar entradas para el partido de la selección peruana a disputarse en el estadio nacional, si se cuentan con 8 puertas de ingreso. ¿De cuántas formas diferentes se puede dar que los amigos utilicen solo dos de las 8 puertas de ingreso?

Resolución

- A) 700 B) 840 C) 896 D) 1680 E) 1792

solo dos puertas

$$\binom{8}{2} \times (2^5 - 2) = 840$$

Los 5 eligen
una de las 2
puertas

Rpta. B

Problema 268

Un nuevo juego de lotería entra al mercado, en su primer sorteo se gana un premio si se aciertan en por lo menos 3 de los 5 números que salieron elegidos de un total de 25 números. ¿cuántas jugadas diferentes se pueden hacer de manera que tengan premio?

A) 1 896

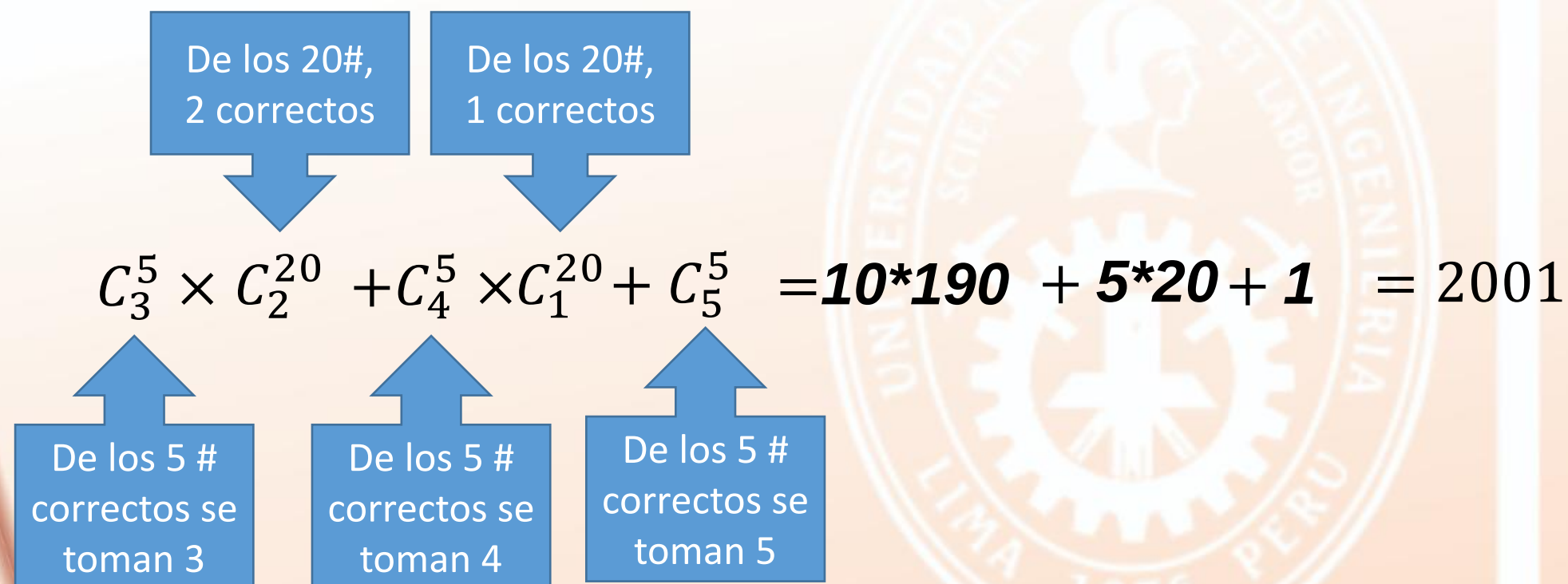
B) 1 901

C) 2 000

D) 2 001

E) 2 002

Resolución:


CLAVE D

Problema 269

Debido al aumento de casos por el contagio del dengue en la región Piura, de un grupo de 12 enfermeras y seis técnicas en enfermería, se van a enviar brigadas de cinco integrantes para el proceso de vacunación, estas brigadas deben estar conformadas por al menos una enfermera y por lo menos dos técnicas. ¿Cuántas brigadas distintas se pueden formar, si una enfermera debe ser la responsable de la brigada?

A) 4 800

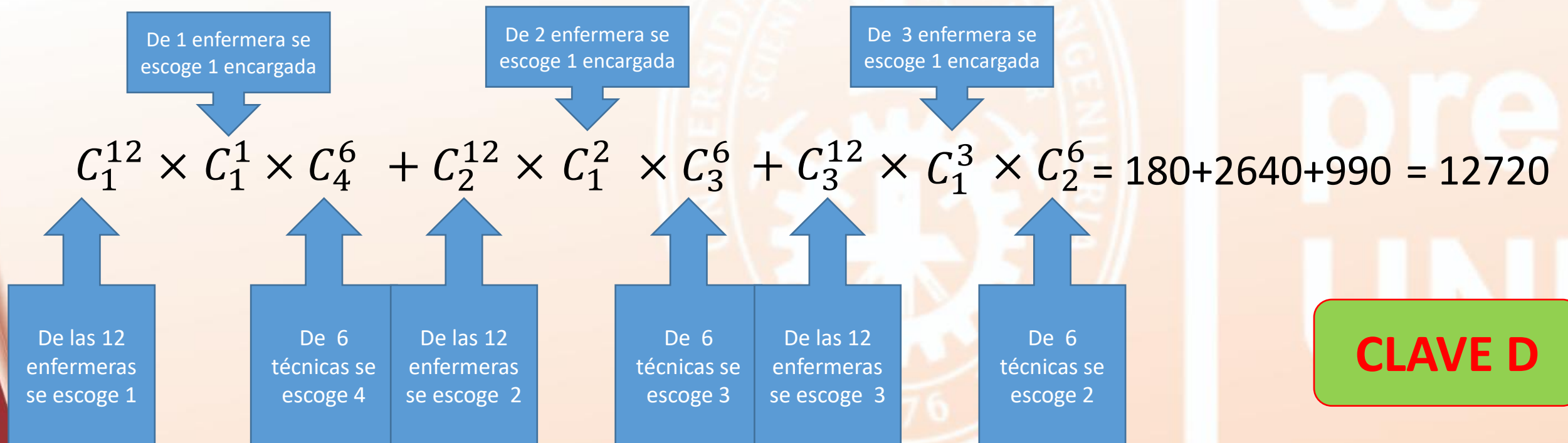
B) 5 760

C) 9 420

D) 12 720

E) 14 400

Resolución:


CLAVE D

Problema 270

Determine el valor de n en:

A) 2 019

B) 2 020

C) 2 021

D) 2 022

E) 2 023

$$\binom{2\ 020}{42} + \binom{2\ 021}{43} + \binom{2\ 022}{44} - \binom{n}{n-43} = \binom{n}{44} - \binom{2\ 020}{41}$$

Resolución:

$$C_{41}^{2020} + C_{42}^{2020} + C_{43}^{2021} + C_{44}^{2022} = C_{43}^n + C_{44}^n$$

$$C_{42}^{2021} + C_{43}^{2021} + C_{44}^{2022} = C_{44}^{n+1}$$

$$C_{43}^{2022} + C_{44}^{2022} = C_{44}^{n+1}$$

$$C_{44}^{2023} = C_{44}^{n+1}$$



n=2022

CLAVE D